

Algoritmi e Strutture Dati

Luciano Gualà

guala@mat.uniroma2.it

<https://lucianoguala.github.io/homepage/>



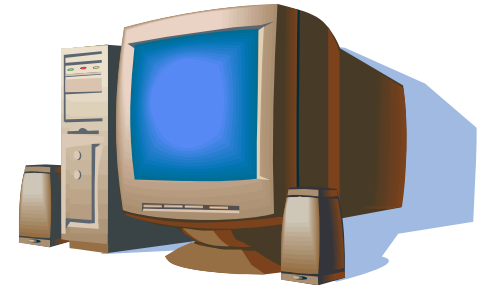
riassunto puntate precedenti

Abbiamo un **problema** a cui sono associate diverse (infinite) **istanze** di diversa **dimensione**. Vogliamo risolvere (automaticamente) il problema progettando un **algoritmo**. L'algoritmo sarà eseguito su un **modello di calcolo** e deve descrivere in modo non ambiguo (utilizzando appositi **costrutti**) la **sequenza di operazioni** sul modello che risolvono una **generica** istanza. La **velocità** dell'algoritmo è misurata come **numero di operazioni** eseguite sul modello e dipende dalla dimensione e dall'istanza stessa. Analizzare la **complessità computazionale** di un algoritmo vuol dire **stimare** il tempo di esecuzione dell'algoritmo nel **caso peggiore** in funzione della dimensione dell'istanza.

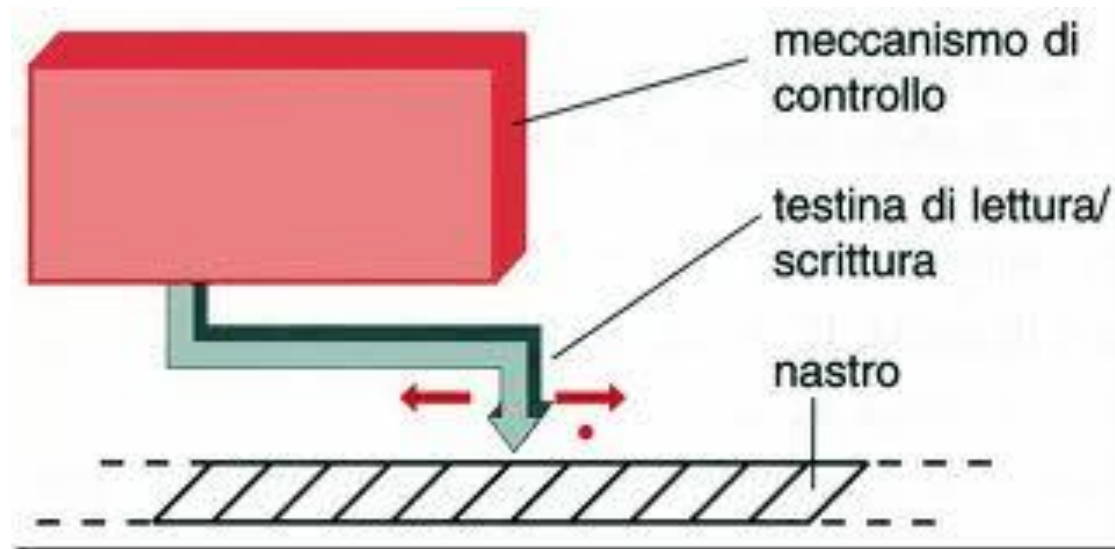
Sappiamo progettare un algoritmo veloce? Fin dove possiamo spingerci con la velocità? A volte si può **dimostrare matematicamente** che **oltre una certa soglia di velocità** non si può andare.

È sensato misurare la complessità di un algoritmo contando il numero di linee di codice eseguite?

modelli di calcolo



Un modello storico: la macchina di Turing



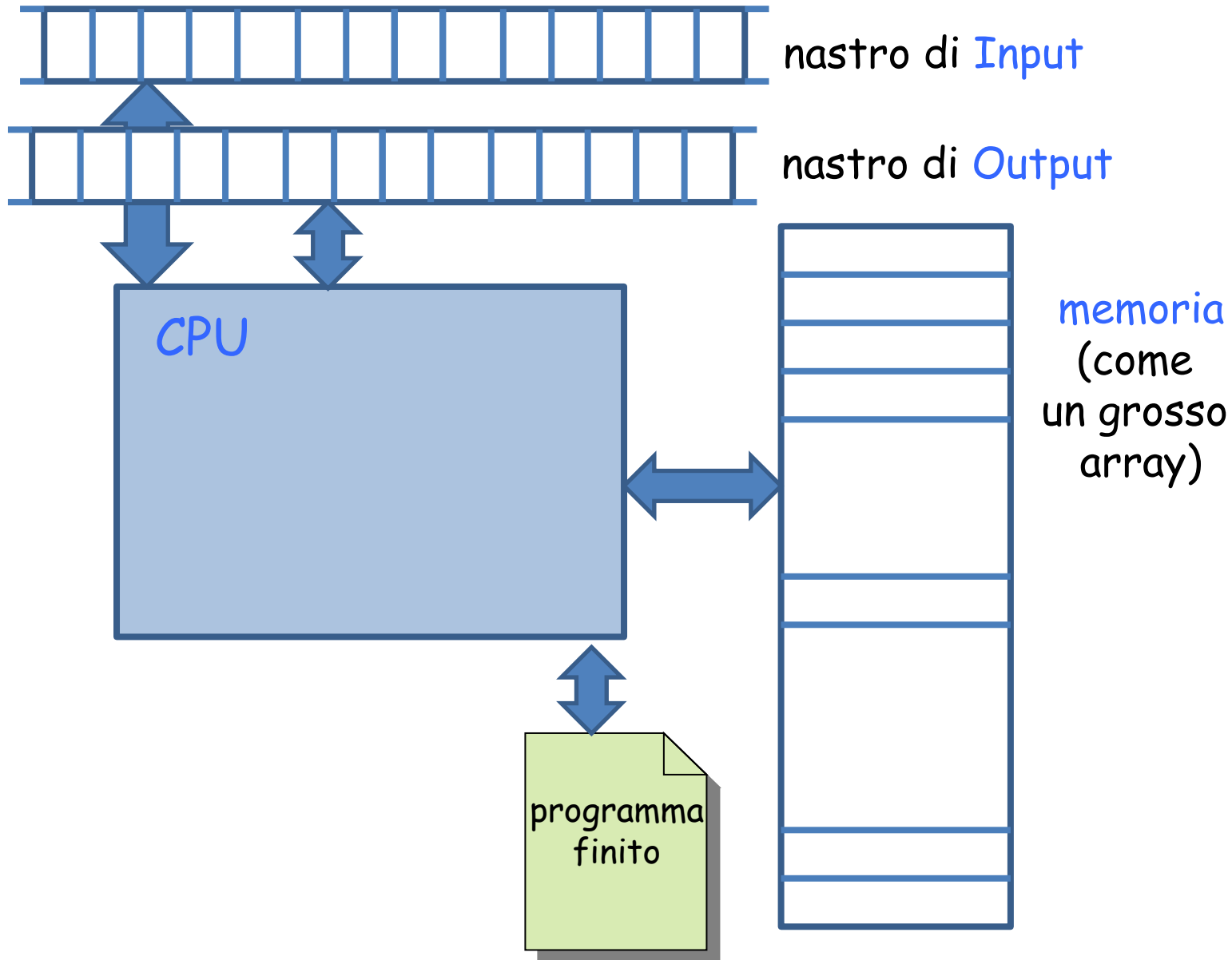
- troppo di **basso livello**: somiglia troppo poco ai calcolatori reali su cui girano i programmi
- utile per parlare di **calcolabilità** ma meno utile per parlare di **efficienza**

un modello più realistico

- Macchina a registri (**RAM**: *random access machine*)
 - un programma finito
 - un nastro di ingresso e uno di uscita
 - una memoria strutturata come un array
 - ogni cella può contenere un qualunque valore intero/reale
 - una CPU per eseguire istruzioni
- la **RAM** è un'astrazione dell'architettura di von Neumann

Macchina a registri

RAM: random access machine



Modello di calcolo: cosa posso fare

- L'analisi della complessità di un algoritmo è basata sul concetto di **passo elementare**
- **passi elementari** su una **RAM**
 - istruzione ingresso/uscita (accesso nastri I/O)
 - operazione aritmetico/logica
 - accesso/modifica del contenuto della memoria

Criteri di costo: quanto mi costa

- Criterio di costo uniforme:
 - tutte le operazioni hanno lo stesso costo
 - complessità temporale misurata come numero di passi elementari eseguiti
- Criterio di costo logaritmico
 - Il costo di una operazione dipende dalla dimensione degli operandi dell'istruzione
 - Un'operazione su un operando di valore x ha costo $\log x$
 - È un criterio di costo che modella meglio la complessità di algoritmi "numerici"

criterio di costo generalmente
usato è quello **uniforme**

Caso peggiore e caso medio

- Misureremo il tempo di esecuzione di un algoritmo in funzione della dimensione n delle istanze
- Istanze diverse, a parità di dimensione, potrebbero però richiedere tempo diverso
- Distinguiamo quindi ulteriormente tra analisi nel caso peggiore e medio

Caso peggiore

- Sia $\text{tempo}(I)$ il tempo di esecuzione (numero di passi elementari sul modello RAM) di un algoritmo sull'istanza I

$$T_{\text{worst}}(n) = \max_{\text{istanze } I \text{ di dimensione } n} \{\text{tempo}(I)\}$$

- Intuitivamente, $T_{\text{worst}}(n)$ è il tempo di esecuzione sulle istanze di ingresso che comportano più lavoro per l'algoritmo
- rappresenta una **garanzia** sul tempo di esecuzione di ogni istanza

Caso medio

- Sia $P(I)$ la probabilità di occorrenza dell'istanza I

$$T_{avg}(n) = \sum_{\text{istanze } I \text{ di dimensione } n} \{P(I) \text{ tempo}(I)\}$$

- Intuitivamente, $T_{avg}(n)$ è il tempo di esecuzione nel **caso medio**, ovvero sulle istanze di ingresso "tipiche" per il problema
- Come faccio a conoscere la distribuzione di probabilità sulle istanze?
- **Semplice**: (di solito) non posso conoscerla
- -> faccio un'assunzione.
- spesso è difficile fare assunzioni realistiche

Esercizio

Analizzare la complessità nel caso medio del primo algoritmo di pesatura (**Alg1**) presentato nella prima lezione. Rispetto alla distribuzione di probabilità sulle istanze, si assuma che la moneta falsa possa trovarsi in modo equiprobabile in una qualsiasi delle n posizioni.

Una grande idea:
notazione asintotica

Notazione asintotica: intuizioni

complessità computazionale di un algoritmo espressa con una funzione $T(n)$

$T(n)$: # passi elementari eseguiti su una RAM nel caso peggiore su un'istanza di dimensione n

Idea: descrivere $T(n)$ in modo qualitativo. Ovvero: perdere un po' in precisione (senza perdere l'essenziale) e guadagnare in semplicità

Notazione asintotica: intuizioni

$T(n)$: # passi elementari eseguiti su una RAM nel caso peggiore su un'istanza di dimensione n

un esempio:

$$T(n) = \begin{cases} 71 n^2 + 100 \lfloor n/4 \rfloor + 7 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 70 n^2 + 150 \lceil (n+1)/4 \rceil + 5 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

scriveremo: $T(n) = \Theta(n^2)$

intuitivamente vuol dire: $T(n)$ è **proporzionale** a n^2

cioè ignoro:

- **costanti** moltiplicative
- termini di **ordine inferiore**
(che crescono più lentamente)

Nota:

l'assunzione implicita è che guardo come si comporta l'algoritmo su **istanze grandi**

...una vecchia tabella: numero asintotico di pesate

assunzione: ogni pesata richiede un minuto

TABELLA

n	10	100	1.000	10.000	100.000
Alg1	9m	~ 1h, 39m	~16 h	~6gg	~69gg
Alg2	5 m	~ 50 m	~8 h	~3,5gg	~35gg
Alg3	3 m	6m	9m	13m	16m
Alg4	3 m	5m	7m	9m	11m

$\Theta(n)$ pesate

$\Theta(\log n)$ pesate

Un'altra tabella: dalla bilancia al computer

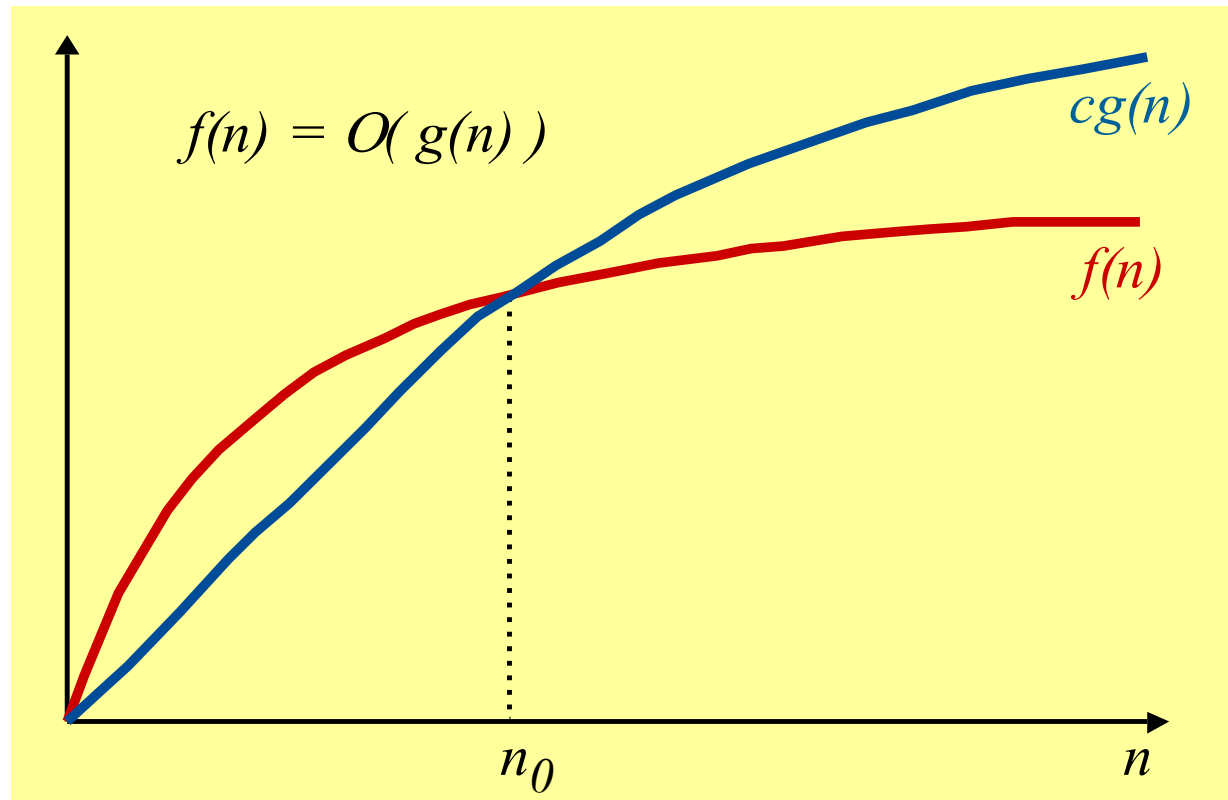
Tempi di esecuzione di differenti algoritmi per istanze di dimensione crescente su un processore che sa eseguire **un milione di istruzioni** di alto livello **al secondo**.

L'indicazione **very long** indica che il tempo di calcolo supera 10^{25} anni.

	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	4 sec
$n = 30$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	18 min	10^{25} years
$n = 50$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	11 min	36 years	very long
$n = 100$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	12,892 years	10^{17} years	very long
$n = 1,000$	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	18 min	very long	very long	very long
$n = 10,000$	< 1 sec	< 1 sec	2 min	12 days	very long	very long	very long
$n = 100,000$	< 1 sec	2 sec	3 hours	32 years	very long	very long	very long
$n = 1,000,000$	1 sec	20 sec	12 days	31,710 years	very long	very long	very long

Notazione asintotica O

$f(n) = O(g(n))$ se $\exists$ due costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che
 $0 \leq f(n) \leq c g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



Esempi:

Sia $f(n) = 2n^2 + 3n$, allora

- $f(n) = O(n^3)$ $(c=1, n_0=3)$
- $f(n) = O(n^2)$ $(c=3, n_0=3)$
- $f(n) \neq O(n)$

Notazione asintotica O

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0 \text{ e } n_0 \geq 0 \text{ tali che} \\ 0 \leq f(n) \leq c g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0\}$$

- La scrittura:

$$2n^2 + 4 = O(n^3)$$

- è un abuso di notazione per:

$$2n^2 + 4 \in O(n^3)$$

Notare:

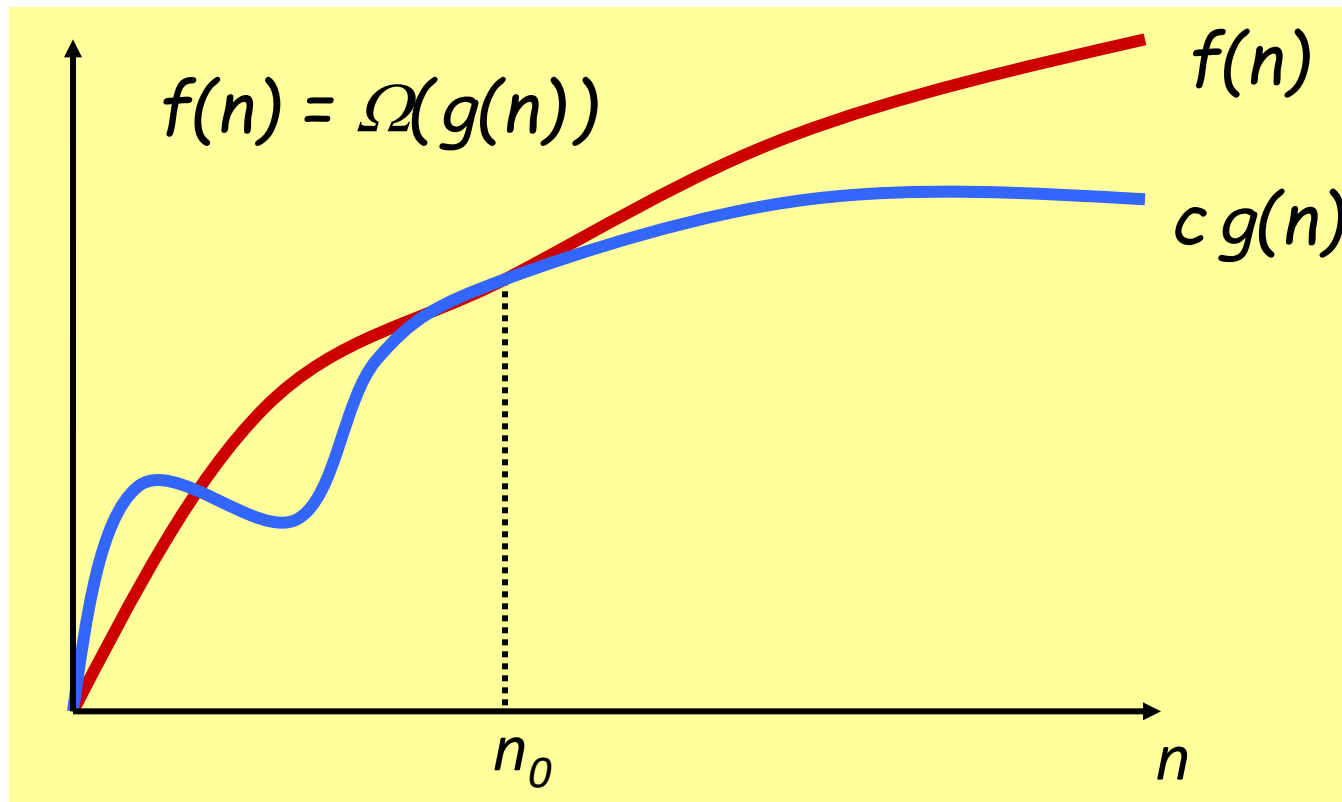
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = O(g(n))$$

$$f(n) = O(g(n)) \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f(n) = O(g(n)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \text{ (se esiste) } < \infty$$

Notazione asintotica Ω

$f(n) = \Omega(g(n))$ se $\exists$ due costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che
 $f(n) \geq c g(n) \geq 0$ per ogni $n \geq n_0$



Esempi:

Sia $f(n) = 2n^2 - 3n$, allora

- $f(n) = \Omega(n)$ $(c=1, n_0=2)$
- $f(n) = \Omega(n^2)$ $(c=1, n_0=3)$
- $f(n) \neq \Omega(n^3)$

Notazione asintotica Ω

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0 \text{ e } n_0 \geq 0 \text{ tali che} \\ 0 \leq c g(n) \leq f(n) \text{ per ogni } n \geq n_0\}$$

- La scrittura:

$$2n^2 + 4 = \Omega(n)$$

- è un abuso di notazione per:

$$2n^2 + 4 \in \Omega(n)$$

Notare:

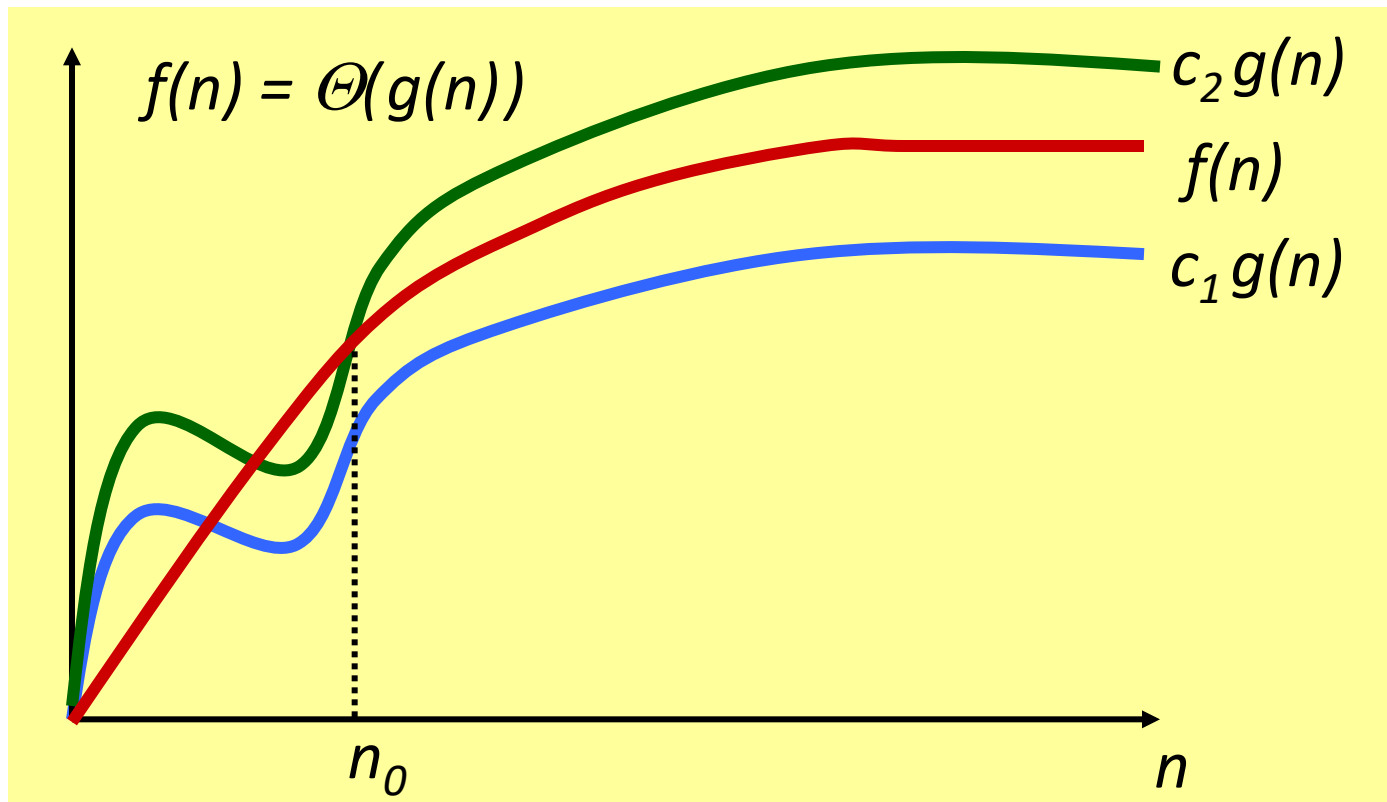
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \quad (\text{se esiste}) \quad > 0$$

Notazione asintotica Θ

$f(n) = \Theta(g(n))$ se $\exists$ tre costanti $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



Esempi:

Sia $f(n) = 2n^2 - 3n$, allora

- $f(n) = \Theta(n^2)$ $(c_1=1, c_2=2, n_0=3)$
- $f(n) \neq \Theta(n)$
- $f(n) \neq \Theta(n^3)$

Notazione asintotica Θ

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0 \text{ e } n_0 \geq 0 \text{ tali che} \\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0\}$$

- La scrittura:

$$2n^2 + 4 = \Theta(n^2)$$

- è un abuso di notazione per:

$$2n^2 + 4 \in \Theta(n^2)$$

Notare che:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$$

$$f(n) = O(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } f(n) = O(g(n))$$

Notazione asintotica o

Data una funzione $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, si denota con $o(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$o(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0, \exists n_0 \text{ tale che} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) < c g(n)\}$$

Notare:

$$o(g(n)) \subset O(g(n))$$

definizione alternativa:

$$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notazione asintotica ω

Data una funzione $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, si denota con $\omega(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n)$:

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0, \exists n_0 \text{ tale che} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c g(n) < f(n)\}$$

Notare:

$$\omega(g(n)) \subset \Omega(g(n))$$

definizione alternativa:

$$f(n) = \omega(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Riassumendo

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow 0 < c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2 < \infty \quad \text{asintoticamente}$$

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2 < \infty \quad \text{asintoticamente}$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow 0 < c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \quad \text{asintoticamente}$$

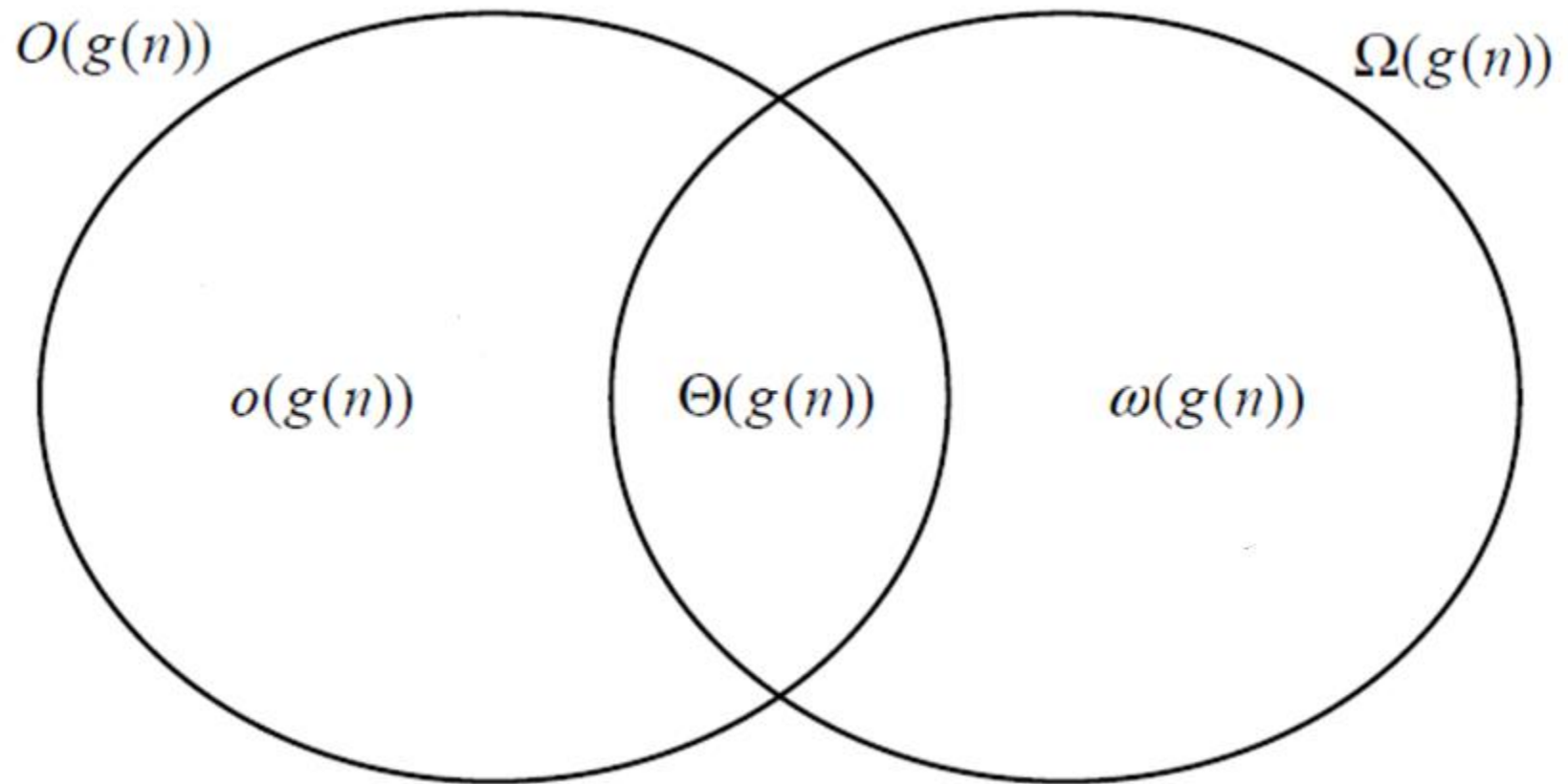
$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Analogie

 O Ω Θ o ω $\leq$ $\geq$ $=$ $<$ $>$

Graficamente



Proprietà della notazione asintotica

Transitività

$f(n) = \Theta(g(n))$	e	$g(n) = \Theta(h(n))$	$\Rightarrow$	$f(n) = \Theta(h(n))$
$f(n) = O(g(n))$	e	$g(n) = O(h(n))$	$\Rightarrow$	$f(n) = O(h(n))$
$f(n) = \Omega(g(n))$	e	$g(n) = \Omega(h(n))$	$\Rightarrow$	$f(n) = \Omega(h(n))$
$f(n) = o(g(n))$	e	$g(n) = o(h(n))$	$\Rightarrow$	$f(n) = o(h(n))$
$f(n) = \omega(g(n))$	e	$g(n) = \omega(h(n))$	$\Rightarrow$	$f(n) = \omega(h(n))$

Riflessività

$$f(n) = \Theta(f(n))$$
$$f(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \Omega(f(n))$$

Simmetria

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))$$

Simmetria trasposta

$$f(n) = O(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n))$$
$$f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n))$$

Ancora una convenzione

Un insieme in una formula rappresenta un'anonima funzione dell'insieme.

Esempio 1:

$$f(n) = n^3 + O(n^2)$$

sta per: c'è una funzione $h(n) \in O(n^2)$ tale che

$$f(n) = n^3 + h(n)$$

Esempio 2:

$$n^2 + O(n) = O(n^2)$$

sta per: per ogni funzione $f(n) \in O(n)$,
c'è una funzione $h(n) \in O(n^2)$ tale che

$$n^2 + f(n) = h(n)$$

...una semplice ma utile proprietà per capire la velocità di una funzione

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = c > 0$

allora $f(n) = \Theta(g(n))$

Infatti:

$$c/2 < f(n)/g(n) < 2c$$

per n suff. grande



Esempio:

Se $T(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_0$ è un polinomio di grado d (con $a_d > 0$), allora $T(n) = \Theta(n^d)$

Infatti:

$$T(n) / n^d = a_d + a_{d-1} n^{-1} + \dots + a_0 n^{-d}$$

che tende a a_d quando $n \rightarrow \infty$:

Polinomi

$$P(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_0$$

$a_d > 0$



$$P(n) = \Theta(n^d)$$
$$P(n) = O(n^d)$$
$$P(n) = \Omega(n^d)$$

Esponenziali

$$f(n) = a^n$$

$a > 1$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^d} = \infty$$

$$a^n = \omega(n^d)$$
$$a^n = \Omega(n^d)$$

Logaritmi

$$f(n) = \log_b(n) \quad b > 1$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\log_b(n)]^c}{n^d} = 0, \forall c, d > 0$$

$$[\log_b(n)]^c = o(n^d)$$
$$[\log_b(n)]^c = O(n^d)$$

Fattoriali

$$f(n) = n! = n * (n-1) * \dots * 2 * 1$$



$$n! = o(n^n)$$
$$n! = \omega(a^n)$$

velocità asintotica di
funzioni composte

Velocità delle funzioni composte

date $f(n)$ e $g(n)$,

la velocità ad andare a infinito della funzione $f(n)+g(n)$
è la velocità della più veloce fra $f(n)$ e $g(n)$

Esempi:

$$n^3+n=\Theta(n^3)$$

$$n+\log^{10} n=\Theta(n)$$

Velocità delle funzioni composte

date $f(n)$ e $g(n)$,

la velocità ad andare a infinito della funzione $f(n) g(n)$
e la velocità di $f(n)$ "più" la velocità di $g(n)$

la velocità ad andare a infinito della funzione $f(n)/g(n)$
e la velocità di $f(n)$ "meno" la velocità di $g(n)$

Esempio:

$$\frac{n^3 \log n + \sqrt{n} \log^3 n}{n^2 + 1} = \Theta(n \log n)$$

Usare la notazione asintotica
nelle analisi

Analisi complessità fibonacci3: un Upper Bound

algoritmo fibonacci3(*intero* n) $\rightarrow$ *intero*

```
1  sia Fib un array di n interi
2   $Fib[1] \leftarrow Fib[2] \leftarrow 1$ 
3  for  $i = 3$  to  $n$  do
4     $Fib[i] \leftarrow Fib[i-1] + Fib[i-2]$ 
5  return  $Fib[n]$ 
```

$T(n)$: complessità computazionale nel caso peggiore con input n

c_j : #passi elementari eseguiti su una RAM quando è eseguita la
linea di codice j

- linea 1, 2 e 5 eseguite una volta
- linee 3 e 4: eseguite al più n volte

$$T(n) \leq c_1 + c_2 + c_5 + (c_3 + c_4)n = \Theta(n)$$



$$T(n) = O(n)$$

Analisi complessità fibonacci3: un Lower Bound

algoritmo fibonacci3(*intero* n) $\rightarrow$ *intero*

```
1  sia Fib un array di  $n$  interi
2  Fib[1]  $\leftarrow$  Fib[2]  $\leftarrow$  1
3  for  $i = 3$  to  $n$  do
4    Fib[i]  $\leftarrow$  Fib[i-1] + Fib[i-2]
5  return Fib[n]
```

Nota: poiché ogni istruzione di alto livello esegue un #costante di passi elementari posso contare # di istruzioni

$T(n)$: complessità computazionale nel caso peggiore con input n

c_j : #passi elementari eseguiti su una RAM quando è eseguita la linea di codice j

la linea 4 è eseguita almeno $n-3$ volte

$$T(n) \geq c_4(n-3) = c_4n - 3c_4 = \Theta(n)$$



$$T(n) = \Omega(n)$$



$$T(n) = \Theta(n)$$

Notazione asintotica: perché è una grande idea

- **misura indipendente** dall'implementazione dell'algoritmo e dalla macchina reale su cui è eseguito
- il "dettagli" nascosti (costanti moltiplicative e termini di ordine inferiore) sono **poco rilevanti** quando **n** è grande per funzioni asintoticamente diverse (guarda tabella)
- **analisi dettagliata** del numero di passi realmente eseguiti sarebbe difficile, noiosa e **non direbbe molto di più** (come si possono conoscere per esempio i costi reali di un'istruzione di alto livello?)
- si è visto che descrive bene **in pratica** la velocità degli algoritmi